

ЛЕКЦИЯ 10

§ 10. Екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің қарапайым түрлері

Екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу жалпы түрде былай жазылады:

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x + p_3(t) = 0 \quad (1)$$

Мұндағы $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ – коэффициенттері белгілі бір $\langle a, b \rangle$ аралығында үзіліссіз нақты функциялар және $p_0(t) \neq 0$, $\forall t \in \langle a, b \rangle$ деп есептелінеді. Көп жағдайларда екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуді мына түрде

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t) \quad (2)$$

қарастырады. Бұл теңдеу *сызықтық біртекті емес* деп, ал оған сәйкес

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (3)$$

теңдеуі *сызықтық біртекті теңдеу* деп аталады. Әлбетте, (1) біртекті емес теңдеуге сәйкес сызықтық біртекті теңдеу

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0 \quad (4)$$

түрінде болады.

Егер $p_0(t) \in C^1\langle a, b \rangle$ болып $\frac{d}{dt} p_0(t) = p_1(t)$, $\forall t \in \langle a, b \rangle$ теңдігі орындалса, онда (4)

теңдеу *өзіне-өзі түйіндес сызықтық дифференциалдық теңдеу* деп аталады. Өзіне-өзі түйіндес теңдеулер практикада жиі кездесетін, сондықтан да кеңінен зерттелген теңдеулер санағына жатады. Өзіне-өзі түйіндес теңдеу былайша

$$\frac{d}{dt}(p_0(t)x) + q(t)x = 0$$

жазылады.

Кез келген екінші ретті сызықтық біртекті теңдеуді өзіне-өзі түйіндес түрге келтіруге болады. Ол үшін (4) сызықтық біртекті теңдеудің екі жағын да қандай да болмасын бір үзіліссіз дифференциалданатын $\mu = \mu(t)$ функциясына көбейтелік:

$$p_0(t)\mu\ddot{x} + p_1(t)\mu\dot{x} + p_2(t)\mu x = 0. \quad (5)$$

Енді $\mu(t)$ функциясын $(p_0(t)\mu)' = p_1(t)\mu$ теңдеуінің шешімі болатындай етіп таңдалық. Бұл теңдеуді ашып жазсақ, бірінші ретті сызықтық біртекті $p_0(t)\dot{\mu} + (\dot{p}_0(t) - p_1(t))\mu = 0$ теңдеуін аламыз. Оның жалпы шешімі:

$$\mu(t) = C \exp\left(-\int \frac{\dot{p}_0(t) - p_1(t)}{p_0(t)} dt\right) = C \frac{1}{p_0(t)} \exp\left(\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt\right)$$

функциясы болады. Бізге теңдеудің кез-келген дара шешімін табу жеткілікті. Сондықтан $C = 1$ деп алып, мына

$$\mu(t) = \frac{1}{p_0(t)} e^{\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt}$$

функциясын аламыз. Онда (5) теңдеу мына түрде

$$e^{\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt} \ddot{x} + \frac{p_1(t)}{p_0(t)} e^{\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt} \dot{x} + \frac{p_2(t)}{p_0(t)} e^{\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt} x = 0$$

жазылады, яғни өзіне-өзі түйіндес түрде

$$\left(e^{\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt} \dot{x} \right)' + \frac{p_2(t)}{p_0(t)} e^{\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt} x = 0$$

болады.

Көп жағдайда (3) теңдеуді оған бірінші ретті туынды кірмейтін түрде $\ddot{x} + g(t)x = 0$ деп қарастырған қолайлы. Бұл түрге де (3) теңдеуді әрқашанда келтіруге болады. Келтірудің екі жолы бар: тәуелсіз айнымалыны өзгерту немесе ізделінетін функцияны біртекті сызықты етіп ауыстыру.

1. Жаңа тәуелсіз айнымалы τ – ды мына үзіліссіз дифференциал-данатын функция $\tau = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ арқылы енгізелік. $(\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle)$.

Ауыстыруды енгізген кезде t бойынша алынған туындыдан τ бойынша алынған туындыға көшу керек:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = x' \dot{\varphi}, & x' &:= \frac{dx}{d\tau}, \\ \ddot{x} &= \frac{dx'}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \dot{\varphi} + x' \ddot{\varphi} = x'' \dot{\varphi}^2 + x' \ddot{\varphi}, & x'' &:= \frac{d^2 x}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

Сонда (3) теңдеу мына түрге $\dot{\varphi}^2 x'' + (\ddot{\varphi} + p(t)\dot{\varphi})x' + q(t)x = 0$ келтіріледі. Енді $\varphi(t)$ функциясын бірінші туындының коэффициенті нөлге тең, яғни $\ddot{\varphi} + p(t)\dot{\varphi} = 0$ теңдеуінің қандай да болмасын бір шешімі болатындай етіп таңдаймыз. Оның жалпы шешімі:

$$\varphi(t) = C_1 \int e^{-\int p(t) dt} dt + C_2$$

функциясы болады. Мұнда C_1, C_2 – еркін тұрақтылар. Бізге теңдеудің кез-келген дара шешімін табу жеткілікті болғандықтан $C_1 = 1, C_2 = 0$ деп алып, ауыстырудың мына түрін

$$\tau = \varphi(t) := \int e^{-\int p(t) dt} dt \tag{6}$$

аламыз. Бұл функция үзіліссіз дифференциалданады және

$$\frac{d\tau}{dt} = \dot{\varphi}(t) = e^{-\int p(t) dt} > 0.$$

Сондықтан (6) функцияның кері функциясы бар. Оны $\psi(\tau)$ деп белгілелік, яғни $t = \psi(\tau)$, $\tau \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Әлбетте кері функция $\psi(\tau)$ үзіліссіз дифференциалданады. Сонымен (6) ауыстыруды енгізу нәтижесінде бірінші ретті туынды кірмейтін

$$x'' + q(\psi(\tau))e^{2\int p(\psi(\tau))\psi'(\tau)d\tau}x = 0$$

теңдеуін аламыз.

2. Изделінетін функцияны жаңа функция y -пен сызықтық біртекті түрде

$$x = a(t)y \quad (7)$$

ауыстырамыз. Мұндағы $a(t)$ функциясын қарастырылып отырған $\langle a, b \rangle$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын, нөлге тең емес функция деп есептейміз. Енгізілген (7) ауыстыруды (3) теңдеуге қоялық

$$\ddot{a}(t)y + 2\dot{a}(t)\dot{y} + a(t)\ddot{y} + p(t)(\dot{a}(t)y + a(t)\dot{y}) + q(t)a(t)y = 0.$$

Бұдан

$$\ddot{y} + \left(\frac{2\dot{a}}{a} + p(t) \right) \dot{y} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + p(t)\frac{\dot{a}}{a} + q(t) \right) y = 0$$

Енді $a(t)$ функциясын бірінші ретті туындының коэффициенті нөлге тең болатындай, яғни

$$\frac{2\dot{a}}{a} + p(t) = 0$$

теңдеуінің бір дербес шешімі болатындай етіп таңдаймыз. Бұдан

$$a(t) = e^{-\frac{1}{2}\int p(t)dt} \quad (8)$$

Сонда

$$\dot{a}(t) = -\frac{1}{2}p(t)e^{-\frac{1}{2}\int p(t)dt}, \quad \ddot{a}(t) = \left(-\frac{1}{2}\dot{p}(t) + \frac{1}{4}p^2(t) \right) e^{-\frac{1}{2}\int p(t)dt}$$

$$\ddot{y} + \left(-\frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4}p^2(t) + q(t) \right) y = 0$$

Мұндағы $J(t) := -\frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4}p^2(t) + q(t)$ функциясы (4) ауыстырудың коэффициенті болатын $a(t)$ функциясынан тәуелді емес. Ол (7) түрдегі барлық ауыстырулар үшін өзінің түрін сақтайды. Сондықтан оны (2) *теңдеудің инварианты* деп атайды.

МЫСАЛДАР. 1. Бессель теңдеуін

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - n^2)x = 0, \quad t > 0$$

өзіне-өзі түйіндес түрге келтірейік. Мұнда

$$\mu(t) = \frac{1}{p_0(t)} e^{\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt} = \frac{1}{t^2} e^{\int \frac{1}{t} dt} = \frac{1}{t}.$$

Осы көбейткішке көбейтсек, Бессель теңдеуі мына түрге

$$t \ddot{x} + \dot{x} + \left(t - \frac{a^2}{t}\right)x = 0$$

яғни өзі-өзіне түйіндес теңдеуге

$$(t\dot{x})' + \left(t - \frac{a^2}{t}\right)x = 0$$

келтіріледі. Бессель теңдеуі $a = \pm 1/2$ болған кезде сызықтық біртекті

$$x = \frac{1}{\sqrt{t}} y$$

ауыстыруы арқылы бірінші туынды еңбейтін

$$\ddot{y} + y = 0$$

теңдеуіне келтірілетінін оңай көрсетуге болады (көрсетіңіз).

2. $(1+t^2)\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0$ теңдеуін тәуелсіз айнымалыны өзгерту арқылы бірінші ретті туынды кірмейтін теңдеуге келтіру керек. Онда (6) формула бойынша

$$\tau = \int e^{-\int \frac{tdt}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln|t + \sqrt{1+t^2}|, \quad \dot{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \quad t = \frac{1}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) = \operatorname{sh} \tau$$

болады да, берілген теңдеуден

$$\frac{1}{1+t^2} x'' + \frac{1}{1+t^2} x = 0, \quad \left(x'' := \frac{d^2 x}{d\tau^2}\right),$$

яғни $x'' + x = 0$ теңдеуі шығады.

3. $t^2\ddot{x} - 2t\dot{x} + (t^2 + 2)x = 0, \quad t \neq 0$ теңдеуін функцияны өзгерту арқылы бірінші туындысы жоқ теңдеуге келтіру керек.

Коэффициенті $a(t)$ (8) формула арқылы анықталатын (7) ауыстыруын енгізелік:

$$x = e^{-\frac{1}{2}\int p(t)dt} y = e^{\int \frac{dt}{t}} y = ty$$

Сонда

$$\ddot{y} + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{t^2} + 1 + \frac{2}{t^2}\right)y = 0; \quad \ddot{y} + y = 0$$

теңдеуін аламыз.

Жаттығулар

1. Тәуелсіз айнымалыны ауыстыру арқылы

$$t\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} - x = 0$$

теңдеуін шешіңіз.

2. Функцияны сызықтық ауыстыру арқылы

$$(1+t^2)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = 0$$

теңдеуін шешіңіз.